

P-laplacien à Poids Indéfini

Petre Sorin Iliăș

Universitatea din București, str. Academiei 14, București, Catedra de Analiză Matematică
e-mail: ilias@fmi.unibuc.ro

Résumé

Dans cet article on démontre l'existence des solutions du problème Dirichlet $-\Delta_p u = \lambda V(x)|u|^{p-2}u + f(x,u)$ en Ω , où le poids V est une fonction s -intégrable Lebesgue sur Ω , $f : \Omega \times \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ est une fonction Carathéodory qui satisfait une condition de croissance et le paramètre réel $\lambda < \lambda_1$, λ_1 étant la première valeur propre positive du p -laplacien à poids indéfini. Par une formule équivalente, les solutions du problème Dirichlet sont les points critiques d'une fonctionnelle de classe C^1 définie sur un espace Banach. On emploie, comme instrument de travail, une méthode variationnelle par laquelle on déduit leur existence et, automatiquement, l'existence des solutions du problème.

Mot clefs: p -laplacien, points critiques

Introduction

On considère $\Omega \subseteq \mathfrak{R}^N$ un domaine borné et $p \in (1, +\infty)$. On note l'espace Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$ doué avec la norme $\|u\|_{1,p} = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$ et $\langle \cdot \rangle$ la paranthèse de dualité entre $W_0^{1,p}(\Omega)$ et son espace dual $W^{-1,p'}(\Omega)$.

On note aussi $p' = \frac{p}{p-1}$ l'exposant conjugué de p et p^* l'exposant critique de p , c'est-à-dire $p^* = +\infty$ si $p \geq N$ et $p^* = \frac{Np}{N-p}$ si $1 < p < N$.

Dans cet article on étudie le problème Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda V(x)|u|^{p-2}u + f(x,u) \text{ en } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (\text{P})$$

ayant les hypothèses suivantes :

(H1) $f : \Omega \times \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ et une fonction Carathéodory avec la propriété

$$|f(x,t)| \leq h(x) \text{ for } x \in \Omega, t \in \mathfrak{R} \quad (1.1)$$

où $h \in L^{p'}(\Omega)$.

$$(H2) \ V \in L^s(\Omega) \text{ avec } s > N \text{ si } p \in (1, N], \text{ ou } V \in L^1(\Omega) \text{ si } p > N. \quad (1.2)$$

(H3) $V^+ \neq 0$, ou $V^+ = \max\{V(x), 0\}$.

(H4) $\lambda \in \mathfrak{R}$.

On démontre que le problème (P) a du moins une solution en $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans le cas où $\lambda < \lambda_1$, λ_1 étant la première valeur propre positive du p-laplacien à poids indéfini. P. Drabek [4] étudie le problème Dirichlet (P) dans le cas particulier $V \equiv 1$ et obtient un résultat similaire pour $\lambda < \lambda_1$. B. Xuan [7] réussit aussi à démontrer l'existence des solutions pour $\lambda < \lambda_1$, en utilisant des méthodes "linking", mettant quand même des hypothèses supplémentaires sur la fonction Carathéodory.

La première valeur propre positive du p-laplacien

$$\lambda_1 = \inf \left\{ \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \mid u \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ et } \int_{\Omega} V(x)|u|^p dx = 1 \right\}$$

M. Cuesta [2] démontre que λ_1 est simple, isolée dans le spectre du p-laplacien et que λ_1 est l'unique valeur propre qui ait une fonction propre associée strictement positive.

Définitions et Résultats Préliminaires

Définition 1. P-laplacien est l'opérateur $-\Delta_p : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$ défini par

$$-\Delta_p u = -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Remarque 1. Il y a $\langle -\Delta_p u, v \rangle = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \bullet \nabla v dx \quad \forall u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Définition 2. Une fonction $f : \Omega \times \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ s'appelle Carathéodory si :

(e) quel que soit $t \in \mathfrak{R}$, la fonction $f_t : \Omega \rightarrow \mathfrak{R}$ définie par $f_t(x) = f(x, t)$ est mesurable Lebesgue ;

(f) pour presque partout $x \in \Omega$ la fonction $f_x : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ définie par $f_x(t) = f(x, t)$ est continue.

Pour toute fonction Carathéodory $f : \Omega \times \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ qui satisfait la condition (H1) on peut définir l'opérateur Nemytskii $N_f : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$ par la formule

$$\langle N_f u, v \rangle = \int_{\Omega} f(x, u) v dx.$$

La fonction $F : \Omega \times \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ définie par $F(x, t) = \int_0^t f(x, s) ds$ est aussi une fonction Carathéodory.

Définition 3. On dit que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ est la solution du problème (P) si

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \bullet \nabla v dx = \lambda \int_{\Omega} V(x) |u|^{p-2} u v dx + \int_{\Omega} f(x, u) v dx \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

On introduit les fonctionnelles de classe C^1 $\Psi, J, \Phi : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathfrak{R}$ définies par

$$\Psi(u) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx$$

$$J(u) = \int_{\Omega} V(x) |u|^p dx$$

$$\Phi(u) = \int_{\Omega} F(x, u) dx.$$

Pour tout $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $\Psi'(u) = -\Delta_p u$ (à voir G. Dinca [3]), $\Phi'(u) = N_f u$ (à voir D. G. de Figueiredo [5]) et $\langle J'(u), v \rangle = p \int_{\Omega} V(x) |u|^{p-2} u v dx \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ (à voir M. Cuesta [2]).

On considère la fonctionnelle $H : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathfrak{R}$ définie par

$$H(u) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx - \frac{\lambda}{p} \int_{\Omega} V(x) |u|^p dx - \int_{\Omega} F(x, u) dx.$$

En employant les notations précédentes on peut écrire

$$H(u) = \Psi(u) - \frac{\lambda}{p} J(u) - \Phi(u) \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

La fonctionnelle H est de classe C^1 sur $W_0^{1,p}(\Omega)$. Il y a aussi

$$\langle H'(u), v \rangle = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \bullet \nabla v dx - \lambda \int_{\Omega} V(x) |u|^{p-2} u v dx - \int_{\Omega} f(x, u) v dx \quad \forall u, v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Remarque 2. $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ est la solution du problème (P) si et seulement si $H'(u) = 0$.

Définition 4. Soit X, Y deux espaces Banach. On dit que l'application $T : X \rightarrow Y$ est séquentiellement continue de la topologie faible à la topologie forte si $x_n \xrightarrow{\sigma(X, X^*)} x$ en X implique $T(x_n) \rightarrow T(x)$ en Y .

Proposition 1. La fonctionnelle $J : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathfrak{R}$ définie par $J(u) = \int_{\Omega} V(x) |u|^p dx$ est séquentiellement continue de la topologie faible à la topologie forte.

Pour en démontrer on a besoin de la lemme suivante.

Lemme 1. On considère $p, q \in (1, +\infty)$ et $r \in [1, +\infty)$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$. Si $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$, alors $fg \in L^r(\Omega)$ et a lieu l'inégalité $\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

La démonstration de la Proposition 1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq W_0^{1,p}(\Omega)$ et $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tel que

$$u_n \xrightarrow{\sigma(W_0^{1,p}(\Omega), W^{-1,p'}(\Omega))} u.$$

On va démontrer que $J(u_n) \rightarrow J(u)$ en \mathfrak{R} en trois cas, étant obligé par l'hypothèse (H2) imposée au poids V .

Cas 1. $p \in (1, N)$ et $V \in L^s(\Omega)$ avec $s \in (N, +\infty)$

$$|J(u_n) - J(u)| \leq \int_{\Omega} |V(x)| \left| |u_n|^p - |u|^p \right| dx$$

En employant l'inégalité

$$\left| |a|^p - |b|^p \right| \leq \beta |a - b| (|a| + |b|)^{p-1} \quad \forall a, b \in \mathfrak{R}$$

où $\beta > 0$ est la constante de l'inégalité de Holder, on obtient

$$|J(u_n) - J(u)| \leq \beta \|V\|_s \left(\int_{\Omega} |u_n - u|^{s'} (|u_n| + |u|)^{s'(p-1)} dx \right)^{\frac{1}{s'}}$$

$$\text{ou } s' = \frac{s}{s-1}.$$

L'espace $W_0^{1,p}(\Omega) \subseteq L^q(\Omega)$ avec l'injection continue et compacte. Il en résulte que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_q = 0 \quad \forall q \in (1, p^*).$$

On choisit le paramètre réel $\alpha = \frac{sp}{s-p} \in (1, p^*)$ et on observe que

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{s'},$$

$$(|u_n| + |u|)^{p-1} \in L^{p'}(\Omega) \quad \forall n \in N$$

et

$$|u_n - u| \in L^{\alpha}(\Omega).$$

En utilisant la Lemme 1, on obtient l'inégalité

$$\begin{aligned} |J(u_n) - J(u)| &\leq \beta \|V\|_s \|u_n - u\|_{\alpha} \| |u_n| + |u| \|_p^{p-1} \leq \\ &\leq \beta \|V\|_s \|u_n - u\|_{\alpha} \left(\|u_n\|_p + \|u\|_p \right)^{p-1}. \end{aligned}$$

Le choix du paramètre réel α assure que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_{\alpha} = 0$. Il est évident que $p \in (1, p^*)$ et que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\|u_n\|_p + \|u\|_p \right)^{p-1} = 2^{p-1} \|u\|_p^{p-1}.$$

La dernière inégalité et les deux dernières affirmations démontrent que $\lim_{n \rightarrow \infty} J(u_n) = J(u)$.

Cas 2. $p = N$ et $V \in L^s(\Omega)$ avec $s \in (N, +\infty)$

La démonstration est similaire au cas 1, en remplaçant p par N et p^* par $+\infty$.

Cas 3. $p > N$ et $V \in L^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} |J(u_n) - J(u)| &\leq \beta \int_{\Omega} |V(x)| |u_n - u| (|u_n| + |u|)^{p-1} dx \leq \\ &\leq \beta \|u_n - u\|_{\infty} (\|u_n\|_{\infty} + \|u\|_{\infty})^{p-1} \|V\|_1 \quad \forall n \in N. \end{aligned}$$

L'espace $W_0^{1,p}(\Omega) \subseteq L^{\infty}(\Omega)$ avec l'injection continue et compacte. Par conséquence,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_{\infty} = 0$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{\infty} = \|u\|_{\infty}.$$

On obtient, en utilisant l'inégalité précédente, que $\lim_{n \rightarrow \infty} J(u_n) = J(u)$.

Proposition 2. La fonctionnelle $\Phi : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathfrak{R}$ définie par $\Phi(u) = \int_{\Omega} F(x,u) dx$ est séquentiellement continue de la topologie faible à la topologie forte.

Démonstration. Soit $(u_n)_{n \in N} \subseteq W_0^{1,p}(\Omega)$ et $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tel que

$$u_n \xrightarrow{\sigma(W_0^{1,p}(\Omega), W^{-1,p'}(\Omega))} u.$$

De l'hypothèse (H1) on déduit que

$$|F(x, t_1) - F(x, t_2)| \leq |t_1 - t_2| h(x) \quad \forall x \in \Omega \text{ et } t_1, t_2 \in \mathfrak{R}$$

et

$$|\Phi(u_n) - \Phi(u)| \leq \int_{\Omega} |u_n - u| h(x) dx.$$

L'espace $W_0^{1,p}(\Omega) \subseteq L^p(\Omega)$ avec l'injection continue et compacte. Il en résulte que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_p = 0.$$

De la dernière inégalité on déduit que $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(u_n) = \Phi(u)$.

L'existence des Solutions du Problème (P)

La dernière partie de l'article est dédiée à la démonstration du résultat principal. C'est pourquoi on a besoin d'une méthode variationnelle vu que les solutions du problème (P) correspondent aux points critiques de la fonctionnelle H.

Théorème 1 (à voir M. Struwe [6], page 4). Soit X un espace Banach réflexif et $H : M \rightarrow \mathfrak{R} \cup \{+\infty\}$ une fonctionnelle définie au sousensemble faiblement fermé de X qui a les propriétés suivantes:

- H est coercive sur M : $\lim_{\|u\| \rightarrow \infty, u \in M} H(u) = +\infty$

- H est séquentiellement faiblement inférieurement semicontinue sur M : $x_n \xrightarrow{\sigma(X, X^*)} x$ en M implique

$$H(x) \leq \underline{\lim} H(x_n).$$

Dans ces conditions, H est inférieurement bornée et atteint son minimum sur M .

Le résultat principal de cet article est:

Théorème 2. On suppose que la fonction Carathéodory f et le poids V satisfont les conditions (H1), (H2), (H3). Alors, pour tout paramètre réel $\lambda < \lambda_1$, le problème (P) a du moins une solution.

Pour en démontrer, on a besoin de la lemme suivante.

Lemme 2. La fonctionnelle $\Psi : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathfrak{R}$ définie par $\Psi(u) = \frac{1}{p} \|u\|_{1,p}^p$ est séquentiellement faiblement inférieurement semicontinue sur $W_0^{1,p}(\Omega)$.

La démonstration de la Théorème 2. On considère la fonctionnelle $H : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathfrak{R}$ définie par

$$H(u) = \Psi(u) - \frac{\lambda}{p} J(u) - \Phi(u).$$

L'espace Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$ est espace Banach réflexif (à voir Adams [1]).

Pas 1. On montre que H est séquentiellement faiblement inférieurement semicontinue sur $W_0^{1,p}(\Omega)$. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq W_0^{1,p}(\Omega)$ et $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tel que

$$u_n \xrightarrow{\sigma(W_0^{1,p}(\Omega), W^{-1,p'}(\Omega))} u.$$

Par la Lemme 2, on déduit que

$$\Psi(u) \leq \underline{\lim} \Psi(u_n).$$

Les Propositions 1 et 2 assurent que les fonctionnelles J et Ψ sont séquentiellement continues de la topologie faible à la topologie forte.

Il y a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(u_n) = J(u)$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(u_n) = \Phi(u).$$

Vu les propriétés de la limite inférieure des suites de nombres réels, on obtient

$$H(u) \leq \underline{\lim} H(u_n).$$

Pas 2. On démontre que H est coercive sur $W_0^{1,p}(\Omega)$. Par la définition de la première valeur propre positive λ_1 , on obtient l'inégalité

$$\int_{\Omega} V(x)|u|^p dx \leq \frac{1}{\lambda_1} \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Alors

$$H(u) \geq \frac{1}{p} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} \right) \|u\|_{1,p}^p - \int_{\Omega} F(x,u) dx.$$

On a aussi l'inégalité

$$\left| \int_{\Omega} F(x,u) dx \right| \leq \int_{\Omega} |u| h(x) dx.$$

On emploie l'inégalité de Holder et puis celle de Poincaré. On en obtient

$$\left| \int_{\Omega} F(x,u) dx \right| \leq c \|h\|_{p'} \|u\|_{1,p} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

où $c > 0$ est la constante de l'inégalité de Poincaré.

En associant les deux dernières inégalités, on montre que

$$H(u) \geq \frac{1}{p} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} \right) \|u\|_{1,p}^p - c \|h\|_{p'} \|u\|_{1,p} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad (1)$$

Il est évident que $1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} > 0$ et puis on déduit que

$$\lim_{\|u\|_{1,p} \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} \right) \|u\|_{1,p}^p - c \|h\|_{p'} \|u\|_{1,p} = +\infty \quad (2)$$

Par les relations (1) et (2), on obtient

$$\lim_{\|u\|_{1,p} \rightarrow \infty} H(u) = +\infty.$$

La fonctionnelle H satisfait les conditions de la Théorème 1. Alors, H est inférieurement bornée sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ et atteint son minimum en $W_0^{1,p}(\Omega)$. Soit $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tel que

$H(u_0) = \min_{u \in W_0^{1,p}(\Omega)} H(u)$. Alors, u_0 est le point de minimum global pour H . Un résultat classique nous assure que $H'(u_0) = 0$.

Par la Remarque 2, on peut conclure que $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ est une solution du problème (P).

Références

1. Adams, R. A. - *Sobolev Spaces*, Academic Press, 1975
2. Cuesta, M. - Eigenvalue problems for p-laplacian, *EJDE* 33, pp. 1-9, 2001
3. Dinca, G., Jebelean, P., Mawhin, J. - Variational and topological methods for Dirichlet problems with p-laplacian, *Portugaliae Mathematica* 58, no.3, pp. 339-378, 2001
4. Drabek, P., Robinson, S.B. - Resonance problems for the p-laplacian, *Journal of Functional Analysis* 169, pp. 189-200, 1999
5. Figueiredo, D. G. - *Lectures on the Ekeland Variational Principle with Applications and Detour*, Tata Institute of Fundamental Research, Springer-Verlag, 1989
6. Struwe, M. - *Variational Methods, Applications to Nonlinear PDE and Hamiltonian Systems*, Springer-Verlag, 1990
7. Xuan, B. - Existence results for a superlinear p-laplacian equation with indefinite weights, *Nonlinear Analysis* 54, pp. 949-958, 2003

P-laplacian cu pondere indefinită

Rezumat

În acest articol demonstrez existența soluțiilor problemei Dirichlet

$-\Delta_p u = \lambda V(x)|u|^{p-2}u + f(x,u)$ în Ω , unde ponderea V este o funcție s -integrabilă Lebesgue pe Ω , $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție Caratheodory ce satisface o condiție de creștere și parametrul real $\lambda < \lambda_1$, λ_1 fiind prima valoare proprie pozitivă a p -laplacianului cu pondere nemărginită. Printr-o formulare echivalentă, soluțiile problemei Dirichlet sunt punctele critice ale unei funcționale de clasă C^1 definită pe un spațiu Banach. Se utilizează, ca instrument de lucru, o metodă variațională prin care se deduce existența acestor puncte critice și, implicit, existența soluțiilor problemei.